Tutorato 7 GE220

Docente: Massimiliano Pontecorvo. Esercitatore: Raffaele Carbone.
Tutori: Giovanni Passeri. Bruno Renzi.
Giovedì 26 aprile 2018.

Esercizio 1. *Dire se* $[0,1]$ *è compatto come sottoinsieme di* $(\mathbb{R}, T)$*, dove* T *è la topologia*

1. *Euclidea*
2. *Cofinita (* $A \subset \mathbb{R}$ *chiuso* $\iff$ A *finito oppure vuoto)*
3. *Conumerabile (* $A \subset \mathbb{R}$ *chiuso* $\iff$ A *numerabile oppure vuoto)*
4. *di Sorgenfrey (una cui base è data dalla famiglia* $\{[a,b) : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$*)*

Esercizio 2. *Sia* $T := \{A \subset \mathbb{Z} : a \in A \Rightarrow -a \in A\}$*. Dopo aver mostrato che definisce una topologia su* $\mathbb{Z}$*, mostrare che* $(\mathbb{Z}, T)$ *è a base numerabile, è punto-limite compatto ma non è compatto.*

Esercizio 3. *Mostrare che* $\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{Q}^n$ *(con topologia euclidea) è connesso per archi per* $n \geq 2$*. Cosa possiamo dire per* $n = 1$*?*

Esercizio 4. *Dire se i seguenti sottospazi della retta o del piano euclideo sono compatti:*

1. $\{\frac{1}{n}\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$
2. $[0,1] \cap \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$
3. $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \lneq \frac{1}{n}\} \cap ([-1,1] \times [-1,1]) \subseteq \mathbb{R}^2$
4. $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \lneq \frac{1}{n}\} \subseteq \mathbb{R}^2$

Esercizio 5. *Sia* X *un insieme infinito, dotato della topologia cofinita.*

1. *Mostrare che* X *è compatto.*
2. *Dire se è vero che* X *è compatto per successioni (sugg.: potrebbe essere utile ricordare l'Es 3.4 del Tutorato 2).*
3. *Dire se esiste un'applicazione continua e suriettiva* $f : X \to \mathbb{R}$*.*

Esercizio 6. *Fornire i seguenti esempi.*

1. *Uno spazio topologico compatto ottenibile come quoziente di uno spazio topologico non compatto.*

2. *Uno spazio topologico totalmente sconnesso (i.e.: le sue componenti connesse sono i singleton) e localmente connesso (i.e. scelto comunque $p \in X$, ogni suo intorno aperto U_p ammette un sottoinsieme aperto connesso che contiene p).*

3. *Uno spazio topologico che contiene un aperto proprio compatto.*

Esercizio 7. ** Mostrare che un sottoinsieme chiuso e discreto di uno spazio topologico compatto è finito. (Ricordiamo che se X è uno spazio topologico, un sottospazio $Y \subseteq X$ si dice "discreto" se e solo se la topologia di sottospazio coincide con la topologia discreta). Sugg.: Ricordare che i chiusi di un compatto sono compatti.*